

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapă locală – 28 februarie 2016

Clasa a XI-a

Problema 1: Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 2}$ unde:

$$a_n = \lg(p + \sin 1)^n + n \sum_{k=2}^n \lg \frac{p + \sin \frac{1}{k}}{p + \sin \frac{1}{k-1}}, p > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Discuție după p .

Stelian Piscan, Giurgiu

Problema 2: Pentru $x \in (0,1)$ se consideră suma:

$$S_n(x) = \sqrt{1-x} + x\sqrt{1-x} + x^2\sqrt{1-x} + \dots + x^{n-1}\sqrt{1-x}.$$

a) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$.

b) Determinați numărul $x \in (0,1)$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{3\sqrt{10}x}$.

Elena Țincu, Giurgiu

Problema 3: Se consideră ecuația: $x^2 - 6x + m = 0$, m fiind număr real, cu rădăcinile x_1, x_2 . Să se afle m știind că:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 + x_2 & x_1 \end{vmatrix} = 144.$$

Problema 4: Se consideră șirul $(A_n)_{n \geq 0}$ de matrice pătratice de ordinul p , p număr natural, $p \geq 2$, definit astfel: $A_0 = I_p, A_1 = A$ (A fixată) și relația de recurență $A_{n+2} = 3A_{n+1} - 2A_n$, pentru orice număr natural n . Dacă notăm cu $\text{Tr}(X)$ urma matricei pătrate X , adică suma elementelor de pe diagonala principală, să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Tr}(A_{n+1})}{\text{Tr}(A_n)} \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Tr}(A_{n+1}) - \text{Tr}(A_n)).$$

Șerban Olteanu, Giurgiu